

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その2 (改編 d)
(2014/11/18 講義対応分. 解答提出は 2014/11/25 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$ と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

問1：固有値、固有ベクトル、固有空間 (2x4=8)

下記の行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

それぞれについて導出過程も示すこと。

1. A に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。

2014/11/18宿題1-A。			
A		3	7
6	3	1	3
1	4	-1	1

2. B に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。

2014/11/18宿題1-B。重解で固有空間が1次元しかない			
A		-4	無
-6	-2	1	
2	-2	-1	

3. C に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。

H26宿題・問1を微小変更。2重根だがランク落ちしてくれない。2014/11/18演習					
A			3	3	2
2	2	0	0	0	5
2	-1	0	0	0	-10
1	2	3	1	2	3

手計算メモ

$\lambda = 2$ のときはそのまま解いてOK。

$\lambda = 3$ (二重根) のときは $-x+2y=0, x+2y=0$ と 2 式立ってしまうので $x=0, y=0$ 。ゆえに $(0,0,c)=c(0,0,1)$

4. D に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。

2014/11/18宿題1-D。普通に落ちる例。

A			0	1	2
-1	3	-6	-9	3	-1
2	2	2	5	-2	1
2	2	2	4	-2	1

問2：固有値の性質の利用 (1,1,1,1,1,2,2,1=10)

次の行列を考える。ただし、 a, c, d はいずれも実数であり、かつ、 a は整数、 c は正の整数とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 \\ c & d \end{pmatrix}$$

今、この固有値が 7, -3 であると分かっているとする。

1. 固有値を λ として固有方程式を示せ。

λ を m で表記。

$$(a-m)(d-m) - 8c = 0$$

2. 上記の 1. と 2 つの既知の固有値から、 a, c, d に関する方程式は幾つ得られるか。それらを全て示せ。

$$m=7: (a-7)(d-7) - 8c = 0$$

$$m=-3: (a+3)(d+3) - 8c = 0$$

3. 「固有値の性質」として知りうる知識から得られる方程式を示せ。その知識の内容と出典は教科書上の頁と行で特定すること。

$$P106 \text{ 定理(1)} \quad 7+(-3) = 4 = a+d$$

$$P106 \text{ 定理(2)} \quad 7 \times (-3) = -21 = ad - 8c$$

4. 条件を満たす行列式 $|A|$ は (a, c, d が幾らになるにせよ) 必ず一定値であることを示せ。

$$P106 \text{ 定理(2)} \text{ から } |A| = 7 \times (-3) = -21$$

5. 上記 2. と 3. とで得られる方程式のうち、線形独立な式は幾つあるか。

2 つ(所詮 2. も 3. ももとは同じ。)

6. 3. で得られた式から、 c を特定せよ。(ヒント：条件を満たす c は 2 つある。)

$$a+d=4$$

$$ad-8c+21=0$$

変数 3 つあるので c を定数だと思って

$$a(4-a) \cdot 8c + 21 = 0$$

$$a^2 - 4a + (8c - 21) = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{25 - 8c}$$

a は実数なので $25 - 8c \geq 0$ つまり $25/8 \geq c$ 、一方で $0 < c$ で整数。

ゆえに $c=1, 2, 3$ のみが候補で、 $c=2, 3$ のときのみ a が整数になる。

7. 条件を満たす a, c, d の組を全て求めよ。(当然 4 組存在)

$$(a, c, d) = (5, 2, -1), (-1, 2, 5), (3, 3, 1), (1, 3, 3)$$

8. 4.を確認せよ。

略

問 3 : 固有値の性質の発展 (1x3=3)

1. A の固有値を λ_i とするとき、 tA の固有値を求めよ。

P108.問題 5-1-9(i)の解答参照。

2. A の固有値を λ_i とするとき、 $A + tE$ の固有値を求めよ。

P108.問題 5-1-9(ii)の解答参照。

3. A の固有値を λ_i とするとき、 A^k の固有値を求めよ。ただし k は 0 より大きい整数。

P108.問題 5-1-10 の解答参照。

問 4 : 相似 (1x5=5)

1. n 次正方行列 S, T について、 S と T が相似であるという定義を、 S と T との間に存在する関係式で示せ。教科書上の出典場所 (頁・行) も示すこと。

$$P109 \text{ L2; } B = P^{-1}AP$$

2. S と T の固有多項式について言えることは何か。教科書上の出典場所 (頁・行) も示すこと。

P109 定理; (i)

3. S と T の行列式について言えることは何か。教科書上の出典場所 (頁・行) も示すこと。

P109 定理; (ii)

4. S と T の固有値について言えることは何か。教科書上の出典場所 (頁・行) も示すこと。

P109 定理; (i)

5. S の固有値 λ に対応する固有ベクトルを \mathbf{x} とするとき、 T の固有値 λ (上記 4.の結論に注意) に対する固有ベクトルを求めよ。

P114.問題 5-2-11.の解答参照。

問 5 : 逆行列の計算 (1,1,2=4)

下記は計算過程も示すこと。

1. 上記問 1 の A について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置 (頁・行番号) も示すこと。

P36

$4/21$	$-$	$1/7$
$-$	$1/21$	$2/7$

2. 上記問 1 の B について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置 (頁・行番号) も示すこと。

P36

$-$	$1/8$	$1/8$
$-$	$1/8$	$-$ $3/8$

3. 下記 F について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置 (頁・行番号) も示すこと。

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解

$1/3$	$-$	$2/3$	1
$-$	$1/3$	1	$2/3$
$1/3$		$1/3$	-1

以下は計算過程の一例。

P61,例2(基本変形を利用)						
	3	1	1	1	0	0
	3	2	-1	0	1	0
	2	1	-1	0	0	1
1行目:1列目が1の行があるのならそれを1行目に。なければ1列目が非零の行を1行目に。						
	3	1	1	1	0	0
	3	2	-1	0	1	0
	2	1	-1	0	0	1
1行目:(1,1)を単位化						
	1	1/3	1/3	1/3	0	0
	3	2	-1	0	1	0
	2	1	-1	0	0	1
1行目:(2,1)を零に(1行目を-(2,1)倍して2行目に加算)						
	1	1/3	1/3	1/3	0	0
	0	1	-2	-1	1	0
	2	1	-1	0	0	1
1行目:(3,1)を零に(1行目を-(3,1)倍して3行目に加算)						
	1	1/3	1/3	1/3	0	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	1/3	-1 2/3	- 2/3	0	1
2行目:(2,3行目のどちらかで)2列目が1の行があるのならそれを2行目に。なければ2列目が非零の行を2						
	1	1/3	1/3	1/3	0	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	1/3	-1 2/3	- 2/3	0	1
2行目:(2,2)を単位化						
	1	1/3	1/3	1/3	0	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	1/3	-1 2/3	- 2/3	0	1
2行目:(1,2)を零に(2行目を-(1,2)倍して1行目に加算)						
	1	0	1	2/3	- 1/3	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	1/3	-1 2/3	- 2/3	0	1
2行目:(3,2)を零に(2行目を-(3,2)倍して3行目に加算)						
	1	0	1	2/3	- 1/3	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	0	-1	- 1/3	- 1/3	1
3行目:(3,3)を単位化						
	1	0	1	2/3	- 1/3	0
	0	1	-2	-1	1	0
	0	0	1	1/3	1/3	-1
3行目:(1,3)を零に(3行目を-(1,3)倍して1行目に加算)						
	1	0	0	1/3	- 2/3	1
	0	1	-2	-1	1	0
	0	0	1	1/3	1/3	-1
3行目:(2,3)を零に(3行目を-(2,3)倍して2行目に加算)						
	1	0	0	1/3	- 2/3	1
	0	1	0	- 1/3	1 2/3	-2
	0	0	1	1/3	1/3	-1