**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その２（改編d）**

**(2014/11/18講義対応分. 解答提出は2014/11/25の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

問１：固有値、固有ベクトル、固有空間　(2x4=8)

下記の行列を考える。

, , ,

それぞれについて導出過程も示すこと。

1. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。



2. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。



3. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。



手計算メモ

λ=2のときはそのまま解いてＯＫ。

λ=3(二重根)のときは-x+2y=0,x+2y=0と２式立ってしまうのでx=0,y=0。ゆえに(0,0,c)=c(0,0,1)

4. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。



問２：固有値の性質の利用 (1,1,1,1,1,2,2,1=10)

次の行列を考える。ただし、 はいずれも実数であり、かつ、 は整数、 は正の整数とする。

今、この固有値が 7, -3 であると分かっているとする。

1. 固有値をλとして固有方程式を示せ。

λをmで表記。

(a-m) (d-m) - 8c = 0

2. 上記の1.と２つの既知の固有値から、 に関する方程式は幾つ得られるか。それらを全て示せ。

m=7: (a-7) (d-7) - 8c = 0

m=-3: (a+3) (d+3) - 8c = 0

3. 「固有値の性質」として知りうる知識から得られる方程式を示せ。その知識の内容と出典は教科書上の頁と行で特定すること。

P106定理(1) 7+(-3) = 4 = a+d

P106 定理(2) 7 x (-3) = -21 = ad - 8c

4. 条件を満たす行列式 は ( が幾らになるにせよ) 必ず一定値であることを示せ。

P106 定理(2) から|A|= 7 x (-3) = -21

5. 上記2.と3.とで得られる方程式のうち、線形独立な式は幾つあるか。

2つ(所詮2.も3.ももとは同じ。)

6. 3.で得られた式から、cを特定せよ。（ヒント：条件を満たすcは２つある。）

a+d=4

ad-8c+21=0

変数3つあるのでcを定数だと思って

a(4-a)-8c+21=0

a^2-4a+(8c-21)=0

a=2±root(25-8c)

aは実数なので25-8c>0 つまり 25/8 > c 、一方で0<cで整数。

ゆえにc=1,2,3のみが候補で、c=2,3のときのみaが整数になる。

7. 条件を満たす の組を全て求めよ。（当然４組存在）

(a,c,d) = (5,2,-1), (-1,2,5), (3,3,1), (1,3,3)

8. 4.を確認せよ。

略

問３：固有値の性質の発展 (1x3=3)

1. の固有値を とするとき、の固有値を求めよ。

P108.問題5-1-9(i)の解答参照。

2. の固有値を とするとき、の固有値を求めよ。

P108.問題5-1-9(ii)の解答参照。

3. の固有値を とするとき、 の固有値を求めよ。ただし はより大きい整数。

P108.問題5-1-10の解答参照。

問４：相似 (1x5=5)

1. ｎ次正方行列S, Tについて、SとTが相似であるという定義を、SとTとの間に存在する関係式で示せ。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。

P109 L2; B=P^(-1)AP

2. SとTの固有多項式について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。

P109 定理; (i)

3. SとTの行列式について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。

P109 定理; (ii)

4. SとTの固有値について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。

P109 定理; (i)

5. Sの固有値λに対応する固有ベクトルをxとするとき、Tの固有値λ（上記4.の結論に注意）に対する固有ベクトルを求めよ。

P114.問題5-2-11.の解答参照。

-------------------------------------------

問５：逆行列の計算 (1,1,2=4)

下記は計算過程も示すこと。

1. 上記問1の について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。

P36



2. 上記問1の について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。

P36



3. 下記 について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。

解



以下は計算過程の一例。

