

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その 2 (改編 d)
(2014/11/18 講義対応分. 解答提出は 2014/11/25 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$ と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

問 1 : 固有値、固有ベクトル、固有空間 (2x4=8)

下記の行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

それぞれについて導出過程も示すこと。

1. A に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。
2. B に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。
3. C に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。
4. D に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトル、その固有空間の次元数を示せ。

問 2 : 固有値の性質の利用 (1,1,1,1,1,2,2,1=10)

次の行列を考える。ただし、 a, c, d はいずれも実数であり、かつ、 a は整数、 c は正の整数とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 \\ c & d \end{pmatrix}$$

今、この固有値が $7, -3$ であると分かっているとする。

1. 固有値を λ として固有方程式を示せ。
2. 上記の 1. と 2 つの既知の固有値から、 a, c, d に関する方程式は幾つ得られるか。それらを全て示せ。
3. 「固有値の性質」として知りうる知識から得られる方程式を示せ。その知識の内容と出典は教科書上の頁と行で特定すること。
4. 条件を満たす行列式 $|A|$ は (a, c, d が幾らになるにせよ) 必ず一定値であることを示せ。
5. 上記 2. と 3. とで得られる方程式のうち、線形独立な式は幾つあるか。
6. 3. で得られた式から、 c を特定せよ。(ヒント: 条件を満たす c は 2 つある。)
7. 条件を満たす a, c, d の組を全て求めよ。(当然 4 組存在)

8. 4.を確認せよ。

問 3 : 固有値の性質の発展 (1x3=3)

1. A の固有値を λ_i とするとき、 tA の固有値を求めよ。
2. A の固有値を λ_i とするとき、 $A + tE$ の固有値を求めよ。
3. A の固有値を λ_i とするとき、 A^k の固有値を求めよ。ただし k は 0 より大きい整数。

問 4 : 相似 (1x5=5)

1. n 次正方行列 S, T について、 S と T が相似であるという定義を、 S と T との間に存在する関係式で示せ。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。
2. S と T の固有多項式について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。
3. S と T の行列式について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。
4. S と T の固有値について言えることは何か。教科書上の出典場所（頁・行）も示すこと。
5. S の固有値 λ に対応する固有ベクトルを x とするとき、 T の固有値 λ （上記 4. の結論に注意）に対する固有ベクトルを求めよ。

問 5 : 逆行列の計算 (1,1,2=4)

下記は計算過程も示すこと。

1. 上記問 1 の A について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。
2. 上記問 1 の B について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。
3. 下記 F について逆行列を求めよ。用いた公式ないし解法の教科書上の存在位置（頁・行番号）も示すこと。

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$