**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その３（ver.c）**

**(2014/11/25講義対応分. 解答提出は2014/12/2の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問１：固有値問題　(2x6)

ある複素ｎ次正方行列Aが与えられたとする。固有値には複素数を認めるものとする。

与えられた行列に対して固有値と対応する固有ベクトルを求めることを固有値問題と呼ぶ。

1-1. （重解を含めて）固有値がn個未満しか見つからない状況を説明せよ。

【略解】固有方程式は必ずλのn次方程式になるので、解は常にｎ個ある。(P104,P132)

1-2. どんなAに対しても、ｎ本の固有ベクトルを用意することは常に可能である。その方法を示すとともに、その場合に見られる制約を述べよ。

【略解】線形従属でよければ、固有ベクトルの係数倍をｎ種類替えれば用意できる。一つの固有値についてかならず１種類の固有ベクトルが用意できる(非自明解；P56, P104)ので、結果として常にn本の固有ベクトルは用意できる。ただし、全て互いに線形独立になる保証はない。

1-3. ｎ個の固有値を求めるために、Aが正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。

【略解】不必要。Aの状態に関わらず、固有値は必ずｎ個みつかる。（1-1.）

1-4. Aが正則であれば、ｎ個の固有値を求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。

【略解】十分。厳密には、Aが正則化どうかに関わらず固有値はｎ個見つかる。

1-5. ｎ本の線形独立な固有ベクトルを求めるために、Aが正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。

【略解】不必要。例えば下記の問3のKはrank(K)=1で正則ではないが、３本の線形独立な固有ベクトルを用意できる。

1-6. Aが正則であれば、ｎ本の線形独立な固有ベクトルを求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。

【略解】十分ではない。たとえ正則であってもｎ本の線形独立な固有ベクトルが得られない例は存在する。例えば2014/11/18の宿題1-Bの行列はrankが2であり正則であるが、固有値は-4(重解)でそれに対応する線形独立なベクトルは1本しか用意できない（固有空間の自由度が1しかない）。



問２：対角化 (2x2)

ある複素ｎ次正方行列Aが与えられたとする。

2-1. Aが対角化できる実用十分条件を示せ。

【略解】Aがn個の線形独立な固有ベクトルを持つこと。（P110,対角化の条件の定理）

2-2. Aが対角化できるかどうかを判定するアルゴリズムを、条件分岐２つを含めて書き下だせ。

【略解】

(1) 固有値が全て単根か？単根であれば対角化可能。

(2) 全ての重根な固有値について、k重根の固有値に対する固有空間がk次元あれば、対角化可能。

(3) それ以外は対角化不能。

問３：べき等行列（冪等行列） (1x4)

複素ｎ次正方行列Aが、A2=Aを満たすとする。このような行列をべき等行列という。

3-1. べき等行列の固有値は0か1しかありえないことを示せ。

【略解】P108,問5-1-11. Ax=λxとA2x=λ2xでAx=A2xからλ(λ-1)x=0。固有ベクトルxは定義より非零ベクトルなので、λ(λ-1)=0。ゆえにλ=0,1。

3-2. 下記の行列Kがべき等行列であることを計算によって確認せよ。

【略】

3-3. Kの固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

【略解】固有値は0,0,1。対応する固有ベクトルの例を以下に示す。より一般的な表現としては、固有値0に対して（例えば）、c1 t(1,-1,0) + c2 t (1,0,-1)。



3-4. Kが対角化可能であることを確認してから、対角行列を求めよ。

【略解】3-3.で３本の線形独立な固有ベクトルが得られえているので対角化の条件の定理より



問４：べき零行列（冪零行列）(1x3)

複素ｎ次正方行列Aが、ある自然数mについて、Am = Oを満たすとする。このような行列をべき零行列という。

4-1.べき零行列の固有値を求めよ。

【略解】Am x=λm x=O ここで固有ベクトルxは非零ベクトルなので、λm =0、ゆえにλ=0。

4-2. 下記の行列Lが３乗でのべき零行列であることを計算によって確認せよ。

【略解】２乗と３乗を示す。

 

4-3. Lの固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

【略解】固有値は0で３重根（計算によってでも、4-1の適用でも可）。このときの固有空間は１次元で、c t(1,-1,-1)。

問５：固有値の重解 (2)

複素２次正方行列のなかで固有値が重根である行列を考える。この中で対角化可能な行列は、kE　のみであることを示せ。ただしkは任意のスカラ量、Eは２次の単位行列とする。

【略解】|A-λE|=0で重根時に対角化可能ということは、rank(A-λ1E)=2-2=0ということで、rank(A-λE)=0は(P44など) A-λE=Oである。ゆえにA=λEとなる。

ちなみにここから固有値はkと言える。

問６：定理の定義 (1)

上記の3-1,4-1で得られた知識を定理と呼んでもよいか？その適格性を議論せよ。

【略解】定義と、これまでに証明済みの定理を組み合わせて証明できるものは何であれ定理と呼んでいいし呼ばなくともよい。それを定理と呼びたければお好きにどうぞ。ただし、一般的には、それを読んだ者がその定理を引用した者と同じくその定理の証明を知りえる状況であるべきであろう。

問７：対角化の計算 (1x4)

以下の行列F,Gが与えられているとする。下記は計算過程も示すこと。

,

7-1. 行列Fについて、対角化可能かどうかを示せ。

【略解】固有方程式を解くとλ=0,2,3なので全て単根なので対角化可能。

7-2. 行列Fに対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

【略解】そのまま並べる。



7-3. 行列Gについて、対角化可能かどうかを示せ。

【略解】固有方程式を解くとλ=3（重根）,-2で固有空間が１次元しかないのでｎ本の線形独立な固有ベクトルを用意できない。すなわち対角化不能。ちなみに2014/11/18に出題しているので同じものです！

7-4. 行列Gに対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

【略解】そのまま並べ、３本目に例えば(1,0,0)を用意した場合、次のようになる。

　