線形代数 B/III （4,5,6 クラス）宿題その３（ver.c）
(2014/11/25 講義対応分. 解答提出は 2014/12/2 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$と、行列式を表すときの$\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。
説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

<u>問１：固有値問題 (2x6)</u>
ある複素 n 次正方行列 A が与えられたとする。固有値には複素数を認めるものとする。
与えられた行列に対して固有値と対応する固有ベクトルを求めることを固有値問題と呼ぶ。

1-1. （重解を含めて）固有値が n 個未満しか見つからない状況を説明せよ。
【略解】固有方程式は必ずλの n 次方程式になるので、解は常に n 個ある。(P104,P132)

1-2. どんな A に対しても、n 本の固有ベクトルを用意することは常に可能である。その方法を示すとともに、その場合に見られる制約を述べよ。
【略解】線形従属でよければ、固有ベクトルの係数倍を n 種類替えれば用意できる。一つの固有値についてかならず１種類の固有ベクトルが用意できる(非自明解 ; P56, P104)ので、結果として常に n 本の固有ベクトルは用意できる。ただし、全て互いに線形独立になる保証はない。

1-3. n 個の固有値を求めるために、A が正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。
【略解】不必要。A の状態に関わらず、固有値は必ず n 個みつかる。（1-1.）

1-4. A が正則であれば、n 個の固有値を求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。
【略解】十分。厳密には、A が正則化どうかに関わらず固有値は n 個見つかる。

1-5. n 本の線形独立な固有ベクトルを求めるために、A が正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。
【略解】不必要。例えば下記の問 3 の K は rank(K)=1 で正則ではないが、３本の線形独立

な固有ベクトルを用意できる。

1-6. A が正則であれば、n 本の線形独立な固有ベクトルを求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。
【略解】十分ではない。たとえ正則であっても n 本の線形独立な固有ベクトルが得られない例は存在する。例えば 2014/11/18 の宿題 1-B の行列は rank が 2 であり正則であるが、固有値は-4(重解)でそれに対応する線形独立なベクトルは 1 本しか用意できない（固有空間の自由度が 1 しかない)。

−6	−2
2	−2

問２：対角化（2x2)
ある複素 n 次正方行列 A が与えられたとする。

2-1. A が対角化できる実用十分条件を示せ。
【略解】A が n 個の線形独立な固有ベクトルを持つこと。(P110,対角化の条件の定理)

2-2. A が対角化できるかどうかを判定するアルゴリズムを、条件分岐２つを含めて書き下だせ。
【略解】
(1) 固有値が全て単根か？単根であれば対角化可能。
(2) 全ての重根な固有値について、k 重根の固有値に対する固有空間が k 次元あれば、対角化可能。
(3) それ以外は対角化不能。

問３：べき等行列（冪等行列）（1x4)
複素 n 次正方行列 A が、$A^2=A$ を満たすとする。このような行列をべき等行列という。

3-1. べき等行列の固有値は 0 か 1 しかありえないことを示せ。
【略解】P108,問 5-1-11. $Ax=\lambda x$ と $A^2x=\lambda^2x$ で $Ax=A^2x$ から $\lambda(\lambda-1)x=0$。固有ベクトル x は定義より非零ベクトルなので、$\lambda(\lambda-1)=0$。ゆえに $\lambda=0,1$。

3-2. 下記の行列 K がべき等行列であることを計算によって確認せよ。

$$K=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

【略】

3-3. K の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

【略解】固有値は 0,0,1。対応する固有ベクトルの例を以下に示す。より一般的な表現としては、固有値 0 に対して（例えば）、$c_1\,{}^t(1,-1,0) + c_2\,{}^t(1,0,-1)$。

0	0	1
1	1	0
−1	0	0
0	−1	1

3-4. K が対角化可能であることを確認してから、対角行列を求めよ。

【略解】3-3.で 3 本の線形独立な固有ベクトルが得られえているので対角化の条件の定理より

0	0	0
0	0	0
0	0	1

問 4 ：べき零行列（冪零行列）(1x3)

複素 n 次正方行列 A が、ある自然数 m について、$A^m = O$ を満たすとする。このような行列をべき零行列という。

4-1.べき零行列の固有値を求めよ。

【略解】$A^m x=\lambda^m x=O$ ここで固有ベクトル x は非零ベクトルなので、$\lambda^m=0$、ゆえに $\lambda=0$。

4-2. 下記の行列 L が 3 乗でのべき零行列であることを計算によって確認せよ。

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

【略解】 2 乗と 3 乗を示す。

2	−2	4
−2	2	−4
−2	2	−4

0	0	0
0	0	0
0	0	0

4-3. L の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

【略解】固有値は 0 で 3 重根（計算によってでも、4-1 の適用でも可)。このときの固有空間は 1 次元で、$c\,{}^t(1,-1,-1)$。

問５：固有値の重解 (2)

複素２次正方行列のなかで固有値が重根である行列を考える。この中で対角化可能な行列は、kE　のみであることを示せ。ただし k は任意のスカラ量、E は２次の単位行列とする。

【略解】|A-λE|=0 で重根時に対角化可能ということは、rank(A-λ_1E)=2-2=0 ということで、rank(A-λE)=0 は(P44 など) A-λE=O である。ゆえに A=λE となる。

ちなみにここから固有値は k と言える。

問６：定理の定義 (1)

上記の 3-1,4-1 で得られた知識を定理と呼んでもよいか？その適格性を議論せよ。

【略解】定義と、これまでに証明済みの定理を組み合わせて証明できるものは何であれ定理と呼んでいいし呼ばなくともよい。それを定理と呼びたければお好きにどうぞ。ただし、一般的には、それを読んだ者がその定理を引用した者と同じくその定理の証明を知りえる状況であるべきであろう。

問７：対角化の計算 (1x4)

以下の行列 F,G が与えられているとする。下記は計算過程も示すこと。

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7-1. 行列 F について、対角化可能かどうかを示せ。

【略解】固有方程式を解くとλ=0,2,3 なので全て単根なので対角化可能。

7-2. 行列 F に対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

【略解】そのまま並べる。

0.00	0.00	0.00
0.00	2.00	0.00
0.00	0.00	3.00

7-3. 行列 G について、対角化可能かどうかを示せ。

【略解】固有方程式を解くとλ=3（重根）,-2 で固有空間が１次元しかないので n 本の線形独立な固有ベクトルを用意できない。すなわち対角化不能。ちなみに 2014/11/18 に出題しているので同じものです！

7-4. 行列 G に対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

【略解】そのまま並べ、３本目に例えば(1,0,0)を用意した場合、次のようになる。

−2	3	なし
5	0	1
−10	0	0
3	1	0

$P^{-1}AP$		
−2	0	−0.2
0	3	1.6
0	0	3