**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その３（ver.c）**

**(2014/11/25講義対応分. 解答提出は2014/12/2の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問１：固有値問題　(2x6)

ある複素ｎ次正方行列Aが与えられたとする。固有値には複素数を認めるものとする。

与えられた行列に対して固有値と対応する固有ベクトルを求めることを固有値問題と呼ぶ。

1-1. （重解を含めて）固有値がn個未満しか見つからない状況を説明せよ。

1-2. どんなAに対しても、ｎ本の固有ベクトルを用意することは常に可能である。その方法を示すとともに、その場合に見られる制約を述べよ。

1-3. ｎ個の固有値を求めるために、Aが正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。

1-4. Aが正則であれば、ｎ個の固有値を求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。

1-5. ｎ本の線形独立な固有ベクトルを求めるために、Aが正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。

1-6. Aが正則であれば、ｎ本の線形独立な固有ベクトルを求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。

問２：対角化 (2x2)

ある複素ｎ次正方行列Aが与えられたとする。

2-1. Aが対角化できる実用十分条件を示せ。

2-2. Aが対角化できるかどうかを判定するアルゴリズムを、条件分岐２つを含めて書き下だせ。

問３：べき等行列（冪等行列）(1x4)

複素ｎ次正方行列Aが、A2=Aを満たすとする。このような行列をべき等行列という。

3-1. べき等行列の固有値は0か1しかありえないことを示せ。

3-2. 下記の行列Kがべき等行列であることを計算によって確認せよ。

3-3. Kの固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

3-4. Kが対角化可能であることを確認してから、対角行列を求めよ。

問４：べき零行列（冪零行列）(1x3)

複素ｎ次正方行列Aが、ある自然数mについて、Am = Oを満たすとする。このような行列をべき零行列という。

4-1.べき零行列の固有値を求めよ。

4-2. 下記の行列Lが３乗でのべき零行列であることを計算によって確認せよ。

4-3. Lの固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

問５：固有値の重解 (2)

複素２次正方行列のなかで固有値が重根である行列を考える。この中で対角化可能な行列は、kE　のみであることを示せ。ただしkは任意のスカラ量、Eは２次の単位行列とする。

問６：定理の定義 (1)

上記の3-1,4-1で得られた知識を定理と呼んでもよいか？その適格性を議論せよ。

問７：対角化の計算 (1x4)

以下の行列F,Gが与えられているとする。下記は計算過程も示すこと。

,

7-1. 行列Fについて、対角化可能かどうかを示せ。

7-2. 行列Fに対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

7-3. 行列Gについて、対角化可能かどうかを示せ。

7-4. 行列Gに対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は１行目から３行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。