**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その５（ver.a）**

**(2014/12/09講義対応分. 解答提出は2014/12/16の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問１：２次正方行列でのJordanの標準形　(1,2x7)

1-1. ２次元正方複素行列Aについて、２つの固有値α,βが異なる時に対角化できる条件を示せ。

問答無用で対角化可能。

1-2. ２次正方複素行列Aについてその固有値αが（固有方程式の）二重根であるとき、対角化できるかできないかを判断できる条件を示せ。

対角化できるためには固有ベクトル空間が２次元。ないし線形独立な固有ベクトルが２本用意できること。

1-3. ２次正方行列Aの全要素が整数とし、今、固有値の一つ目が整数で得られたとする。このとき、二つ目の固有値が整数しか取りえないことを証明せよ。

固有方程式の因数分解から、整数αに対して(λ-α)(λ-β)=0とする。λ2-(α+β)λ+αβ=0, 一方で (a-λ)(d-λ)-bc=0からλ2-(a+d)λ+(ad-bc)=0。λ１次項をλの恒等式で見るとβ=(a+d)-αなのでβは整数。

1-4. ２次正方複素行列Aの対角要素がαであるとする。Aの固有値が二重根となるための、b,cに関する条件を求めよ。また、そのときの固有値がα以外ないことを証明せよ。



|A|=(α-λ)2-bc=0だから、λが重解になるためにはbc=0。そのときのλはα。

1-5. ２次元正方複素行列Aの固有値が二重根であるとき、対角化できるAの条件を求めよ。

二重根の固有値をλとしその固有ベクトルをt(x,y)とすると(A-λE)t(x,y)=0。任意のx,yについて成立することが固有空間の自由度２を保つ（拘束式が０本）ために必要なので、(a-λ)x+by=0, cx+(d-λ)y=0からx,yについてみると a-λ=0,b=0,c=0,d-λ=0。言い換えると、AはλE。

1-6. 下記のように3分類した対角要素が等しい２次正方行列において、これらが全て２重根をもち、かつ、この中で1,2番目は対角化できないことを証明せよ。



いずれもbc=0なので上記1-4.から重根αをもつ。また、1,2番目はb≠0, c≠0なので1-5に反するので対角化不能。

1-7. 次のようなBに対して、ジョルダンの標準形(P-1BP)を求めよ。ただし結果はJordan細胞の直和形で示せ。そのとき、Pを求める計算過程も示せ。





P-1BP=J(-3,2)。Pの導出は省略。

1-8. 次のようなCに対して、ジョルダンの標準形(P-1CP)を求めよ。ただし結果はJordan細胞の直和形で示せ。そのとき、Pを求める計算過程も示せ。





P-1CP=J(2,1)+(J5,1)。ただし+は直和演算記号とする。ちなみに対角化できている。Pの導出は省略。

問２：３次正方行列でのJordanの標準形　(2,1,2x6)

2-1. ３次正方行列の要素が全て整数であるものを考える。今、固有値が２つまで得られて、それらが整数であったとする。このとき、３つ目の固有値が整数に必ずなることを証明せよ。

(λ-α)(λ-β)(λ-γ)=0と因数分解できたとすると、λの0次項はαβγ。一方で、Aの固有方程式をAからサラスの展開で求めると、その過程には和・差・積の演算しかないので、λに関する0次項は明らかに整数。α、βがすでに整数であることから、αβγを整数にできるのは、γが整数のときのみ。

2-2. ３次正方複素行列Aについて、３つの固有値α,β,γが異なる時に対角化できる条件を示せ。

問答無用に可能。

2-3. ３次正方複素行列Aについて、α≠βとして固有値がα,βの２種類のみ得られたとき、βを固有方程式の二重根とする。Aを対角化できる条件を示せ。

βに対する固有空間が２次元。言い換えると、線形独立な固有ベクトルが２本採れること。

2-4. 以下に示す３次正方行列Bにおいて、Jordanの標準形を求めよ。ただしPは求めないまま求めること。解答はJordan細胞の直和で示すこと。



(λ-1)(λ-2)2=0で固有ベクトルは３本採れる（ないしはrank(A-E)=2, rank(A-2E)=1）。J(1,1)+J(2,1)+J(2,1)。対角化。

2-5. 以下に示す３次正方行列Cにおいて、Jordanの標準形を求めよ。ただしPは求めないまま求めること。解答はJordan細胞の直和で示すこと。



(λ+2)(λ-3)2=0で固有ベクトルは２本採れる（ないしはrank(A+2E)=2, rank(A-3E)=2）。J(-2,1)+J(3,2)。

2-6. 上問2-4の行列Bにおいて、固有値をλkとする(k=1,2,3)。(A-λ1E), (A-λ2E), (A-λ3E), (A-λ1E) (A-λ2E), (A-λ2E) (A-λ3E), (A-λ3E) (A-λ1E), (A-λ1E) (A-λ2E) (A-λ3E)を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

(A-E)(A-2E),(A-E)(A-2E)2のみ零行列。



2-7. 上問2-5の行列Cにおいて、固有値をλkとする(k=1,2,3)。(A-λ1E), (A-λ2E), (A-λ3E), (A-λ1E) (A-λ2E), (A-λ2E) (A-λ3E), (A-λ3E) (A-λ1E), (A-λ1E) (A-λ2E) (A-λ3E)を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

(A+2E)(A-3E)2のみ零行列。



2-8. ある与えられた３次正方行列に関して、異なる固有値が２つだけ得られたとする。Jordanの標準形導出に関して、上問2-7,2-8から予想できることを考えてみよ。本問については他書籍、インターネット等を駆使してよい。

(λ-単根)(λ-重根)から零行列になる場合は固有ベクトルが３本採れて対角化可能。

(λ-単根)(λ-重根)2でやっと零行列になる場合は固有ベクトルが２本しか採れなくてJ(単根,1)+J(重根,2)となる。

※最小多項式で３次より大きい正方行列でのJordan標準形の求め方に繋がっている。