**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その５（ver.a）**

**(2014/12/09講義対応分. 解答提出は2014/12/16の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問１：２次正方行列でのJordanの標準形　(1,2x7)

1-1. ２次元正方複素行列Aについて、２つの固有値α,βが異なる時に対角化できる条件を示せ。

1-2. ２次正方複素行列Aについてその固有値αが（固有方程式の）二重根であるとき、対角化できるかできないかを判断できる条件を示せ。

1-3. ２次正方行列Aの全要素が整数とし、今、固有値の一つ目が整数で得られたとする。このとき、二つ目の固有値が整数しか取りえないことを証明せよ。

1-4. ２次正方複素行列Aの対角要素がαであるとする。Aの固有値が二重根となるための、b,cに関する条件を求めよ。また、そのときの固有値がα以外ないことを証明せよ。



1-5. ２次元正方複素行列Aの固有値が二重根であるとき、対角化できるAの条件を求めよ。

1-6. 下記のように3分類した対角要素が等しい２次正方行列において、これらが全て２重根をもち、かつ、この中で1,2番目は対角化できないことを証明せよ。



1-7. 次のようなBに対して、ジョルダンの標準形(P-1BP)を求めよ。ただし結果はJordan細胞の直和形で示せ。そのとき、Pを求める計算過程も示せ。



1-8. 次のようなCに対して、ジョルダンの標準形(P-1CP)を求めよ。ただし結果はJordan細胞の直和形で示せ。そのとき、Pを求める計算過程も示せ。



問２：３次正方行列でのJordanの標準形　(2,1,2x6)

2-1. ３次正方行列の要素が全て整数であるものを考える。今、固有値が２つまで得られて、それらが整数であったとする。このとき、３つ目の固有値が整数に必ずなることを証明せよ。

2-2. ３次正方複素行列Aについて、３つの固有値α,β,γが異なる時に対角化できる条件を示せ。

2-3. ３次正方複素行列Aについて、α≠βとして固有値がα,βの２種類のみ得られたとき、βを固有方程式の二重根とする。Aを対角化できる条件を示せ。

2-4. 以下に示す３次正方行列Bにおいて、Jordanの標準形を求めよ。ただしPは求めないまま求めること。解答はJordan細胞の直和で示すこと。



2-5. 以下に示す３次正方行列Cにおいて、Jordanの標準形を求めよ。ただしPは求めないまま求めること。解答はJordan細胞の直和で示すこと。



2-6. 上問2-4の行列Bにおいて、固有値をλkとする(k=1,2,3)。(A-λ1E), (A-λ2E), (A-λ3E), (A-λ1E) (A-λ2E), (A-λ2E) (A-λ3E), (A-λ3E) (A-λ1E), (A-λ1E) (A-λ2E) (A-λ3E)を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。



2-7. 上問2-5の行列Cにおいて、固有値をλkとする(k=1,2,3)。(A-λ1E), (A-λ2E), (A-λ3E), (A-λ1E) (A-λ2E), (A-λ2E) (A-λ3E), (A-λ3E) (A-λ1E), (A-λ1E) (A-λ2E) (A-λ3E)を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

2-8. ある与えられた３次正方行列に関して、異なる固有値が２つだけ得られたとする。Jordanの標準形導出に関して、上問2-7,2-8から予想できることを考えてみよ。本問については他書籍、インターネット等を駆使してよい。