

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その 5 (ver.a)
(2014/12/09 講義対応分. 解答提出は 2014/12/16 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right)$ と、行列式を表すときの

$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 2 次正方行列での Jordan の標準形 (1,2x7)

1-1. 2 次元正方複素行列 A について、2 つの固有値 α, β が異なる時に対角化できる条件を示せ。

1-2. 2 次正方複素行列 A についてその固有値 α が (固有方程式の) 二重根であるとき、対角化できるかできないかを判断できる条件を示せ。

1-3. 2 次正方行列 A の全要素が整数とし、今、固有値の一つ目が整数で得られたとする。このとき、二つ目の固有値が整数しか取りえないことを証明せよ。

1-4. 2 次正方複素行列 A の対角要素が α であるとする。 A の固有値が二重根となるための、 b, c に関する条件を求めよ。また、そのときの固有値が α 以外ないことを証明せよ。

α	b
c	α

1-5. 2 次元正方複素行列 A の固有値が二重根であるとき、対角化できる A の条件を求めよ。

1-6. 下記のように 3 分類した対角要素が等しい 2 次正方行列において、これらが全て 2 重根をもち、かつ、この中で 1,2 番目は対角化できないことを証明せよ。

α	b		α	0		α	0
0	α		c	α		0	α

1-7. 次のような B に対して、ジョルダンの標準形($P^{-1}BP$)を求めよ。ただし結果は Jordan 細胞の直和形で示せ。そのとき、 P を求める計算過程も示せ。

-3	0
2	-3

1-8. 次のような C に対して、ジョルダンの標準形($P^{-1}CP$)を求めよ。ただし結果は Jordan 細胞の直和形で示せ。そのとき、 P を求める計算過程も示せ。

3	1
2	4

問2：3次正方行列での **Jordan** の標準形 (2,1,2x6)

2-1. 3次正方行列の要素が全て整数であるものを考える。今、固有値が2つまで得られて、それらが整数であったとする。このとき、3つ目の固有値が整数に必ずなることを証明せよ。

2-2. 3次正方複素行列 A について、3つの固有値 α, β, γ が異なる時に対角化できる条件を示せ。

2-3. 3次正方複素行列 A について、 $\alpha \neq \beta$ として固有値が α, β の2種類のみ得られたとき、 β を固有方程式の二重根とする。 A を対角化できる条件を示せ。

2-4. 以下に示す3次正方行列 B において、**Jordan** の標準形を求めよ。ただし P は求めないまま求めること。解答は **Jordan** 細胞の直和で示すこと。

1	2	1
-1	4	1
2	-4	0

2-5. 以下に示す3次正方行列 C において、**Jordan** の標準形を求めよ。ただし P は求めないまま求めること。解答は **Jordan** 細胞の直和で示すこと。

2	2	0
2	-1	0
1	2	3

2-6. 上問 2-4 の行列 B において、固有値を λ_k とする ($k=1,2,3$)。 $(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$ を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

A-E				A-2E				(A-E)(A-2E)			
0	2	1		-1	2	1		0	0	0	0
-1	3	1		-1	2	1		0	0	0	0
2	-4	-1		2	-4	-2		0	0	0	0

2-7. 上問 2-5 の行列 C において、固有値を λ_k とする ($k=1,2,3$)。 $(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$ を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

2-8. ある与えられた3次正方行列に関して、異なる固有値が2つだけ得られたとする。**Jordan** の標準形導出に関して、上問 2-7,2-8 から予想できることを考えてみよ。本問については他書籍、インターネット等を駆使してよい。