線形代数 B/III （4,5,6 クラス）宿題その５（ver.a）
（2014/12/09 講義対応分．解答提出は 2014/12/16 の講義開始時）
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ$\left(\qquad\right)$と、行列式を表すときの$\left|\qquad\right|$は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。
説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問１：２次正方行列での Jordan の標準形 （1,2x7)

1-1. ２次元正方複素行列 A について、２つの固有値α,βが異なる時に対角化できる条件を示せ。

問答無用で対角化可能。

1-2. ２次正方複素行列 A についてその固有値αが（固有方程式の）二重根であるとき、対角化できるかできないかを判断できる条件を示せ。

対角化できるためには固有ベクトル空間が２次元。ないし線形独立な固有ベクトルが２本用意できること。

1-3. ２次正方行列 A の全要素が整数とし、今、固有値の一つ目が整数で得られたとする。このとき、二つ目の固有値が整数しか取りえないことを証明せよ。

固有方程式の因数分解から、整数αに対して$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)=0$ とする。$\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$, 一方で $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$ から$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$。$\lambda$ １次項をλの恒等式で見ると$\beta=(a+d)-\alpha$なのでβは整数。

1-4. ２次正方複素行列 A の対角要素がαであるとする。A の固有値が二重根となるための、b,c に関する条件を求めよ。また、そのときの固有値がα以外ないことを証明せよ。

α	b
c	α

$|A|=(\alpha-\lambda)^2-bc=0$ だから、λが重解になるためには bc=0。そのときのλはα。

1-5. ２次元正方複素行列 A の固有値が二重根であるとき、対角化できる A の条件を求めよ。

二重根の固有値をλとしその固有ベクトルを ${}^t(x,y)$とすると$(A-\lambda E){}^t(x,y)=0$。任意の x,y について成立することが固有空間の自由度２を保つ（拘束式が０本）ために必要なので、$(a-\lambda)x+by=0$, $cx+(d-\lambda)y=0$ から x,y についてみると $a-\lambda=0, b=0, c=0, d-\lambda=0$。言い換えると、A は$\lambda E$。

1-6. 下記のように 3 分類した対角要素が等しい２次正方行列において、これらが全て２重根をもち、かつ、この中で 1,2 番目は対角化できないことを証明せよ。

α	b		α	0		α	0
0	α		c	α		0	α

いずれも bc=0 なので上記 1-4.から重根 α をもつ。また、1,2 番目は b≠0, c≠0 なので 1-5 に反するので対角化不能。

1-7. 次のような B に対して、ジョルダンの標準形($P^{-1}BP$)を求めよ。ただし結果は Jordan 細胞の直和形で示せ。そのとき、P を求める計算過程も示せ。

−3	0
2	−3

A			−3		A−λ E		P_2	0		P			$P^{-1}AP$	
−3	0		0		0	0	0.5	0		0	0.5		−3	1
2	−3		1		2	0	0	0		1	0		0	−3

$P^{-1}BP$=J(-3,2)。P の導出は省略。

1-8. 次のような C に対して、ジョルダンの標準形($P^{-1}CP$)を求めよ。ただし結果は Jordan 細胞の直和形で示せ。そのとき、P を求める計算過程も示せ。

3	1
2	4

A			2	5		P			$P^{-1}AP$	
3	1		−1	1		−1	1		2	0
2	4		1	2		1	2		0	5

$P^{-1}CP$=J(2,1)+(J5,1)。ただし+は直和演算記号とする。ちなみに対角化できている。P の導出は省略。

問２：３次正方行列での Jordan の標準形　(2,1,2x6)

2-1. ３次正方行列の要素が全て整数であるものを考える。今、固有値が２つまで得られて、それらが整数であったとする。このとき、３つ目の固有値が整数に必ずなることを証明せよ。

$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)=0$ と因数分解できたとすると、λ の 0 次項は αβγ。一方で、A の固有方程式を A からサラスの展開で求めると、その過程には和・差・積の演算しかないので、λ に関する 0 次項は明らかに整数。α、β がすでに整数であることから、αβγ を整数にできるのは、γ が整数のときのみ。

2-2. ３次正方複素行列 A について、３つの固有値 α, β, γ が異なる時に対角化できる条件を示せ。

問答無用に可能。

2-3. ３次正方複素行列Aについて、$\alpha \neq \beta$ として固有値が α, β の２種類のみ得られたとき、β を固有方程式の二重根とする。A を対角化できる条件を示せ。

β に対する固有空間が２次元。言い換えると、線形独立な固有ベクトルが２本採れること。

2-4. 以下に示す３次正方行列 B において、Jordan の標準形を求めよ。ただし P は求めないまま求めること。解答は Jordan 細胞の直和で示すこと。

1	2	1
−1	4	1
2	−4	0

$(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$ で固有ベクトルは３本採れる（ないしは rank(A-E)=2, rank(A-2E)=1)。

J(1,1)+J(2,1)+J(2,1)。対角化。

2-5. 以下に示す３次正方行列 C において、Jordan の標準形を求めよ。ただし P は求めないまま求めること。解答は Jordan 細胞の直和で示すこと。

2	2	0
2	−1	0
1	2	3

$(\lambda+2)(\lambda-3)^2=0$ で固有ベクトルは２本採れる（ないしは rank(A+2E)=2, rank(A-3E)=2)。

J(-2,1)+J(3,2)。

2-6. 上問 2-4 の行列 B において、固有値を λ_k とする(k=1,2,3)。$(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

(A-E)(A-2E),(A-E)(A-2E)^2 のみ零行列。

A−E		
0	2	1
−1	3	1
2	−4	−1

A−2E		
−1	2	1
−1	2	1
2	−4	−2

(A−E)(A−2E)		
0	0	0
0	0	0
0	0	0

2-7. 上問 2-5 の行列 C において、固有値を λ_k とする(k=1,2,3)。$(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)$, $(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$, $(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E)$, $(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)$を求め、その中で零行列になっているものを列挙せよ。ただし重解等で同じと見なせるものは計算・表記しなくてよい。

(A+2E)(A-3E)^2 のみ零行列。

A+2E		
4	2	0
2	1	0
1	2	5

A−3E		
−1	2	0
2	−4	0
1	2	0

(A+2E)(A−3E)		
0	0	0
0	0	0
8	4	0

(A+2E)(A−3E)^2		
0	0	0
0	0	0
0	0	0

2-8. ある与えられた３次正方行列に関して、異なる固有値が２つだけ得られたとする。Jordan の標準形導出に関して、上問 2-7,2-8 から予想できることを考えてみよ。本問については他書籍、インターネット等を駆使してよい。

(λ-単根)(λ-重根)から零行列になる場合は固有ベクトルが３本採れて対角化可能。

$(\lambda-$単根$)(\lambda-$重根$)^2$ でやっと零行列になる場合は固有ベクトルが２本しか採れなくて J(単根,1)+J(重根,2)となる。

※最小多項式で３次より大きい正方行列での Jordan 標準形の求め方に繋がっている。