

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その6 (ver.a)  
(2014/12/16 講義対応分. 解答提出は 2015/1/6 の講義開始時)  
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ  $\left( \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$  と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$  は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 直交行列の性質 (1x3)

行列  $A$  が直交行列であるとする。

1-1. 直交行列の性質を 4 つ以上示せ。

【略解】 P97  $LL^T=E$  および(i)-(iii)。

1-2. あるベクトル  $x$  があるとき、 $Ax$  のノルムは  $x$  自身と同じであることを示せ。

【略解】 P98 定理(i)。もとの変換の定義がそうになっているので、その表現行列も当然それに従う。

1-3. 直交変換（およびその表現である直交行列）はその変換前後において、ベクトル間の角度を保存するか？その根拠を教科書のページ番号を示し、引用して記述せよ。

【略解】 P99 註。

問 2 : 2 重根の固有値をもつ対象行列の対角化 (1x12)

今、行列  $A$  を次のように取る。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

2-1. この行列の固有値を求めよ。単根を  $\lambda_1$ 、2 重根を  $\lambda_2$  とする。

【略解】  $\lambda_1=-2, \lambda_2=-5$

2-2.  $\lambda_1$  に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。

【略解】 連立方程式が 2 本なので 1 次元。  $c_1(1,1,1)$  ただし  $c_1$  は 0 でない任意の複素数。

2-3.  $\lambda_2$  に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。

【略解】 連立方程式が 1 本( $x+y+z=0$ )なので 2 次元。例えば  $c_2(1,-1,0)+c_3(1,0,-1)$ 。

2-4. 上記 2-3.の固有ベクトル表現の中から、線形独立な 2 つのベクトルを選び出せ。これらを  $p_2, p_3$  とする。

【略解】  $p_2=(1,-1,0)$ ,  $p_3=(1,0,-1)$

2-5. 上記 2-2.からベクトルを一つ選び、これを  $p_1$  とする。 $p_1, p_2, p_3$  を用いて  $P$  と  $P^{-1}$  を求め、そこから計算により  $A$  を対角化せよ。

【略解】  $p_1=(1,1,1)$  とすると

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2-6.  $p_1$  を正規化せよ。これを  $q_1$  とする。

【略解】  $q_1=1/r(3) (1,1,1)$

2-7.  $p_2, p_3$  をグラムシュミット法により直交正規化せよ。これらを  $q_2, q_3$  とする。

【略解】  $q_2=1/r(2) (1,-1,0)$ ,  $q_3= (1/r(6), 1/r(6), -r(2)/r(3))$

2-8. 念のため、 $q_2, q_3$  が  $\lambda_2$  の固有ベクトルであることを確認しておきたい。どうすればよいか？またそれを実行して確認せよ。

【略解】  $A q_2 = \lambda_2 q_2$  を確認。 $q_3$  も同じ。

2-9. 正方行列  $Q=(q_1, q_2, q_3)$  を用意すると、 ${}^tQQ=E$  となることを確認せよ。

【略解】 省略。

2-10. 上記 2-9.を保証してくれる定理は何か？教科書のページ番号を示したうえで、その定理の内容を記載せよ。

【略解】P117.実対称行列の対角化の定理中にある「適当な直交行列  $P$ 」および P97 定理(ii)。

2-11.  ${}^tQAQ$  の結果を予想せよ。その根拠となった教科書中の頁番号と記述を示せ。

【略解】 P117 の定理全体。

2-12.実際に  ${}^tQAQ$  が 2-11 の予想の通りになることを計算により確認せよ。

【略解】

$${}^tQAQ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

### 問3：エルミート行列の対角化 (1x15)

実対称行列を複素行列に拡張したものがエルミート行列である。

まず、ある複素行列  $A$  に対して、共役転置行列  ${}^*A$  を定義する(随伴行列とも呼ぶ)。これは  $A$  の各要素をその共役の複素数に置き換えた後、転置したものである。例として、 $i$  を虚数単位、 $a$  から  $h$  を実数とすれば、次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{bmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^*A = \begin{bmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & g-hi \end{bmatrix}$$

定義：エルミート行列  $\Leftrightarrow {}^*A=A$

また、実直交行列を複素行列に拡張したものをユニタリ行列という。

定義：ユニタリ行列  $\Leftrightarrow {}^*AA=A{}^*A=E$

今、3次正方複素行列  $B$  が次のように与えられたとする。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3i & i \\ -3i & 3 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3-1.  $B$  がエルミート行列であることを示せ。

【略解】共役の複素数に置き換えて転置すると  $B$  に一致する。

3-2. 以下で実際に固有値と固有ベクトルを求める（いわゆる固有値問題）を実際に解いてもらうが、その前に、この時点で、どのような固有値が幾つ求められるはずか述べよ。その根拠を示している教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。ただし授業でまだしてない範囲を引用する必要はない。

【略解】複素数の固有値が重根を含んで3つ得られる。根拠は P104 の中ほど「固有方程式  $\cdots$  は  $\lambda$  の  $n$  次方程式で  $\cdots$  (P132)」。P132(厳密には P133 の系)のほうまでは引用しなくてよい。

3-3. 上記 3-2. と同じく、線形独立な固有ベクトルがどのように得られるか述べよ。その根拠を教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。

【略解】少なくとも異なる固有値の個数までは線形独立な複素ベクトルが(確実に)得られる。根拠は P103 「固有ベクトル  $x$  とは、幾何的に考えれば  $\cdots$ 」の3行。P104 の例 1 の直前の「さて、各固有値  $\lambda_i$  に対しては  $\cdots$ 」でも可。

3-4. 正方複素行列の固有値を求める方法を教科書のページ番号で示した上で、 $B$  の固有値を全て求めよ。(固有値は全て実数となるように調整済)

【略解】P104. 固有値は-2,3,5。

3-5.  $B$  の線形独立な固有ベクトルを全て挙げよ。

【略解】 $c_1(1, (3/5)i, (1/5)i)$ ,  $c_2(0, 1, -3)$ ,  $c_3(1, -(3/2)i, -(1/2)i)$  ただし  $c_1, c_2, c_3$  は 0 でない任意の複素数。転置してあるほうがよいがどうでもよい。計算過程は別紙 LecNote 7 枚目の裏。

3-6. 上記 3-5. の固有ベクトルを正規化したい。まず正規化の定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

【略解】P94, 「正規化」から始まる3行。

3-7. 正規化の定義式に出てくるノルムとは何か。その定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

【略解】 $|a|$  のこと。P91 に定義がある。

3-8. ここでは（ここに限らず多くの場合暗黙のうちに）内積の定義として教科書 P91 の例 1 に示したものを採用する。さて、厳密には、なぜここでこのような断りを入れなければならないのか？理由を説明せよ。

【略解】P92 の註 1。

3-9. 準備と理解が済んだところで、3-5. の固有ベクトルを全て正規化せよ。ただし、正規化

されたベクトルは第一要素の実数部が正となるように求めること。もし第一要素が0である場合は、第二要素を同様にすること。

【略解】ルート  $k$  を  $r(k)$  で示す。

$$\lambda = -2 \rightarrow \mathbf{p}_1 = (r(5)/r(7), 3/r(5)/r(7), 1/r(5)/r(7))$$

$$\lambda = 3 \rightarrow \mathbf{p}_2 = (0, 1/r(2)/r(5), -3/r(2)/r(5))$$

$$\lambda = 5 \rightarrow \mathbf{p}_3 = (r(2)/r(7), 3i/r(2)/r(7), -i/r(2)/r(7))$$

3-10. 正規化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列を  $P$  とする。 $P$  を求めよ。ただし、対応する固有値が昇順（左から小さいもの順）になるように並べること。

【略解】 $\mathbf{p}_1$  から順に並べる。縦に（列に）並べてないとNG。

3-11. 上記 3-10. の  $P$  がユニタリ行列であることを計算によって検証したいので、まず  $P^*P$  が  $E$  になることを計算によって確認せよ。

【略解】 $*P$  省略。

3-12. 続いて、 $PP^*$  が  $E$  になることを計算によって確認することで証明終わり、としたいところではあるが、1-11.を行ってみておそらく計算は大変だったことであろう。そこで、 $P^*P$  が  $E$  であることを計算によって求める代わりに、 $P^*P = E$  から  $*PP = E$  を証明せよ。どうしても証明ができなければ計算で確認してもよい。

$$\text{【略解】 } *PP = *PEP = *P(P^*P)P = *PP^*PP = (*PP)(^*PP) = (*PP)^2$$

ここで  $*PP = M$  と表記すると  $P = P^2$  であり、 $M(M-E) = O$  となり、 $M$  は  $E$  か  $O$  となる。 $*PP = O$  としてしまうと、 $P$  は線形独立な列ベクトルの集合からなっているのでその逆行列が存在してその  $P^{-1}$  を右から掛けて  $*P = O$  となり、これはありえない（もとの  $P$  が正則のとき、随伴行列の定義から明らかに  $*P \neq O$ ）。よって  $M = E$ 。（解法はどのようなものでも可。ただし、「wikipedia や〜にそういう性質だと書いてあったから」というのはNG）

3-13.  $P$  がユニタリ行列であるといえると、実用上どのようないいことがあるか説明せよ。

【略解】 $P^{-1} = *P$  なので逆行列を求めなくともすぐに  $P^{-1}$  が求まる。

3-14.  $*PBP$  の結果を予想した上で、計算によりそうなることを確認せよ。

$$\text{【略解】 } *PBP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}。計算は省略。$$

3-15. エルミート行列が実数での対称行列、ユニタリ行列が実数での直交行列に対応することを覚えるためのごろ合わせを何か提案せよ。

【略解】なんでも書いてあれば可。