線形代数 B/III （4,5,6 クラス）宿題その９（ver.b）
(2015/01/27 講義対応分．解答提出は 2015/02/03 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$と、行列式を表すときの$\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行番号を示すこと。30 点満点。

問１：Frobenius の定理（1+4x4+1x2=19）

Frobenius の定理の証明を考える。

1-1. 三角行列化の定理は、どのような行列に適用可能か。あてはまるものに〇をつけよ。

正方行列　　正則行列　　対角行列　　複素行列　　実数行列　　非正方行列

【略解】最後以外。

1-2. 与えられた行列Aに対して、正則行列Pを適当に選び、Aの三角化行列$P^{-1}AP$を得たとする。このとき任意の正の整数kについて次式が成立することを実際に証明せよ。

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^k \end{bmatrix} \qquad (1)$$

【略解】

aii については i 行ベクトルと i 列ベクトルの積であり、i 行ベクトルの 1…i-1 要素が 0 でかつ i 列ベクトルの i+1…n 要素が 0 であることから、aii=λ_i^2。

aij (i>j つまり左下側)については i 行ベクトルの第 1…i-1 要素が 0, j 列ベクトルの第 j+1…n 要素が 0。i-1 が j+1 より 1 小さいところまでならその積は 0 になる。

aij (i<j つまり右上側)については非零。

1-3. 一方で、任意の正の整数kについて次式も成立することを丁寧に証明せよ。

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\mathrm{A}^kP \qquad (2)$$

【略解】

行列演算の積の結合法則(P30)から上式を展開し、$PP^{-1} = E$を利用。

1-4. ここで、x に関する m 次の多項式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 \qquad (3)$$

を考えると、次式が得られることを具体的に式変形して示せ。

$$P^{-1}f(A)P = a_m(P^{-1}A^mP) + a_{m-1}(P^{-1}A^{m-1}P) + \cdots + a_oE \qquad (4)$$

【略解】左から P^{-1} を右から P を掛ける。最後の項だけ整理。

1-5. (4)式は右辺をまとめると(5)式のように表現できる。

$$P^{-1}f(A)P = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ここで、$B = P^{-1}f(A)P$とする。三角行列 B の固有値はその対角要素であることを証明したい。そこで、まず、三角行列 $B = [b_{ij}]$ の固有多項式が

$$|\mathrm{B} - \lambda\mathrm{E}| = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda)\cdots(b_{nn} - \lambda) \qquad (6)$$

となることを証明せよ。

【略解】行列式の定義（計算）P64 式(1)から、対角を集めた項以外はすべて左下三角の 0 要素をその積に必ず 1 つ含んでしまうことを説明すればよい。

1-6. 三角行列 Bの固有方程式を示せ。

【略解】$(b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda)\cdots(b_{nn} - \lambda) = 0$

1-7. 三角行列 Bの固有方程式から、Bの固有値を求めよ。

【略解】$f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),\ \cdots,\ f(\lambda_n)$

1-8. 実は Bの固有値はもとのAの固有値に一致する。その根拠は何か説明せよ。教科書上の根拠となる部分(ページ数、行数など)も示せ。

【略解】B は A を適切な表現行列 P によって対角化した A の相似行列である(P109.相似な行列の定義)。相似行列は固有多項式、固有値、が一致する(P109.相似な行列の性質の定理(i)より)。

問２：Frobenius の定理の利用(1x7)

2-1.次の行列 A の固有多項式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & -8 \\ 7 & 0 & -4 \\ 21 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

【略解】$(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

2-2. A の固有値を求めよ。

【略解】1,1,2

2-3. A-E の固有値を求めよ。

【略解】1-1=0, 2-1=1

2-4. A-2E の固有値を求めよ。

【略解】1-2=-1, 2-2=0

2-5. A^2-3A+2E の固有値を求めよ。

【略解】(A-2E)(A-E)なので 0

2-6. A^3+A^2-10A+8E の固有値を求めよ。

【略解】まともに代入して 0.ないしは (A+4E) (A-2E)(A-E)から 0.

2-7. $A^3+3A^2-4A+6E$ の固有値を求めよ。

【略解】まともに代入して 6, 18。ないしは(A-6E) (A-2E)(A-E) + 12A-6E から。

<u>問３：Frobenius の定理の利用(2x2)</u>

3-1.次の行列 A の固有値を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} -255 & 292 & 292 \\ 19 & 18 & -38 \\ -165 & 165 & 221 \end{pmatrix}$$

ただしこの行列については、独立な固有ベクトルが ${}^t(1,1,0)$, ${}^t(2,0,1)$, ${}^t(0,-1,1)$と採れることがわかっている。

【略解】P を作り、P^{-1} もとめて、$B=P^{-1}AP$ からλ=37, -109, 56。

3-2. (A-36E)(A+110E)(A-55)の固有値を求めよ。

【略解】(37+110)(37-55)=147・-18=-2646, (-109-36)(-109-55)=-145・-309=44805, (56-36)((56+110)=3320。

以上