線形代数 B/III （4,5,6 クラス）宿題その９（ver.b）
（2015/01/27 講義対応分. 解答提出は 2015/02/03 の講義開始時）
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$と、行列式を表すときの$\begin{vmatrix} & & \end{vmatrix}$は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行番号を示すこと。30 点満点。

問１：Frobenius の定理（1+4x4+1x2=19）

Frobenius の定理の証明を考える。

1-1. 三角行列化の定理は、どのような行列に適用可能か。あてはまるものに○をつけよ。

正方行列　　正則行列　　対角行列　　複素行列　　実数行列　　非正方行列

1-2. 与えられた行列Aに対して、正則行列Pを適当に選び、Aの三角化行列$P^{-1}AP$を得たとする。このとき任意の正の整数kについて次式が成立することを実際に証明せよ。

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^k \end{bmatrix} \qquad (1)$$

1-3. 一方で、任意の正の整数kについて次式も成立することを丁寧に証明せよ。

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\mathrm{A}^k P \qquad (2)$$

1-4. ここで、x に関する m 次の多項式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 \qquad (3)$$

を考えると、次式が得られることを具体的に式変形して示せ。

$$P^{-1}f(A)P = a_m(P^{-1}A^m P) + a_{m-1}(P^{-1}A^{m-1}P) + \cdots + a_o E \qquad (4)$$

1-5. (4)式は右辺をまとめると(5)式のように表現できる。

$$P^{-1}f(A)P = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ここで、$B = P^{-1}f(A)P$とする。三角行列 B の固有値はその対角要素であることを証明したい。そこで、まず、三角行列 $B = [b_{ij}]$ の固有多項式が

$$|\mathrm{B} - \lambda\mathrm{E}| = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda)\cdots(b_{nn} - \lambda) \qquad (6)$$

となることを証明せよ。

1-6. 三角行列 Bの固有方程式を示せ。

1-7. 三角行列 Bの固有方程式から、Bの固有値を求めよ。

1-8. 実は Bの固有値はもとのAの固有値に一致する。その根拠は何か説明せよ。教科書上の根拠となる部分(ページ数、行数など)も示せ。

問２：Frobenius の定理の利用(1x7)

2-1.次の行列 A の固有多項式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & -8 \\ 7 & 0 & -4 \\ 21 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

2-2. A の固有値を求めよ。

2-3. A-E の固有値を求めよ。

2-4. A-2E の固有値を求めよ。

2-5. A^2-3A+2E の固有値を求めよ。

2-6. A^3+A^2-10A+8E の固有値を求めよ。

2-7. A^3+3A^2-4A+6E の固有値を求めよ。

問３：Frobenius の定理の利用(2x2)

3-1.次の行列 A の固有値を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -255 & 292 & 292 \\ 19 & 18 & -38 \\ -165 & 165 & 221 \end{pmatrix}$$

ただしこの行列については、独立な固有ベクトルが ${}^t(1,1,0)$, ${}^t(2,0,1)$, ${}^t(0,-1,1)$と採れることがわかっている。

3-2. (A-36E)(A+110E)(A-55)の固有値を求めよ。

以上