**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その９（ver.b）**

**(2015/01/27講義対応分. 解答提出は2015/02/03の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行番号を示すこと。30点満点。

問1：Frobeniusの定理 (1+4x4+1x2=19)

Frobeniusの定理の証明を考える。

1-1. 三角行列化の定理は、どのような行列に適用可能か。あてはまるものに○をつけよ。

正方行列　　正則行列　　対角行列　　複素行列　　実数行列　　非正方行列

【略解】最後以外。

1-2. 与えられた行列に対して、正則行列を適当に選び、の三角化行列を得たとする。このとき任意の正の整数について次式が成立することを実際に証明せよ。

【略解】

aiiについてはi行ベクトルとi列ベクトルの積であり、i行ベクトルの1…i-1要素が0でかつi列ベクトルのi+1…n要素が0であることから、aii=λi2。

aij (i>j つまり左下側)についてはi行ベクトルの第1…i-1要素が0, j列ベクトルの第j+1…n要素が0。i-1がj+1より1小さいところまでならその積は0になる。

aij (i<j つまり右上側)については非零。

1-3. 一方で、任意の正の整数について次式も成立することを丁寧に証明せよ。

【略解】

行列演算の積の結合法則(P30)から上式を展開し、を利用。

1-4. ここで、xに関するm次の多項式

を考えると、次式が得られることを具体的に式変形して示せ。

【略解】左からP-1を右からPを掛ける。最後の項だけ整理。

1-5. (4)式は右辺をまとめると(5)式のように表現できる。

ここで、とする。三角行列Bの固有値はその対角要素であることを証明したい。そこで、まず、三角行列 の固有多項式が

となることを証明せよ。

【略解】行列式の定義（計算）P64式(1)から、対角を集めた項以外はすべて左下三角の0要素をその積に必ず１つ含んでしまうことを説明すればよい。

1-6. 三角行列 の固有方程式を示せ。

【略解】

1-7. 三角行列 の固有方程式から、の固有値を求めよ。

【略解】

1-8. 実は の固有値はもとのの固有値に一致する。その根拠は何か説明せよ。教科書上の根拠となる部分(ページ数、行数など)も示せ。

【略解】BはAを適切な表現行列Pによって対角化したAの相似行列である(P109.相似な行列の定義)。相似行列は固有多項式、固有値、が一致する(P109.相似な行列の性質の定理(i)より)。

問２：Frobeniusの定理の利用(1x7)

2-1.次の行列Aの固有多項式を求めよ。

【略解】(λ-1)2(λ-2)=0

2-2. Aの固有値を求めよ。

【略解】1,1,2

2-3. A-Eの固有値を求めよ。

【略解】1-1=0, 2-1=1

2-4. A-2Eの固有値を求めよ。

【略解】1-2=-1, 2-2=0

2-5. A2-3A+2Eの固有値を求めよ。

【略解】(A-2E)(A-E)なので 0

2-6. A3+A2-10A+8E の固有値を求めよ。

【略解】まともに代入して0.ないしは (A+4E) (A-2E)(A-E)から0.

2-7. A3+3A2-4A+6Eの固有値を求めよ。

【略解】まともに代入して6, 18。ないしは(A-6E) (A-2E)(A-E) + 12A-6Eから。

問３：Frobeniusの定理の利用(2x2)

3-1.次の行列Aの固有値を求めよ。

ただしこの行列については、独立な固有ベクトルがt(1,1,0), t(2,0,1), t(0,-1,1)と採れることがわかっている。

【略解】Pを作り、P-1ももとめて、B=P-1APからλ=37, -109, 56。

3-2. (A-36E)(A+110E)(A-55)の固有値を求めよ。

【略解】(37+110)(37-55)=147・-18=-2646, (-109-36)(-109-55)=-145・-309=44805, (56-36)((56+110)=3320。

以上