

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 中間試験その 10 (ver.a)
(2015/02/03 実施分)

問 1 : 対角行列の固有値

2次元対角行列の固有値は、その対角要素であることを示せ。

【略解】

$$|A - \lambda E| = (a - \lambda)(d - \lambda) - 0 = (\lambda - a)(\lambda - d) = 0$$

問 2 : ある固有値をもつ行列

その固有値が 37, -109, 56 であるような行列を 1 つ例示せよ。

【略解】

一番単純には、対角行列。

$$\begin{bmatrix} 37 & 0 & 0 \\ 0 & -109 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}$$

問 3 : 非対角行列の固有値

その固有値が 37, -109, 56 であるような非対角行列を 1 つ例示せよ。

【略解】

P114 問 5-2-7 の結果を知っていれば、右上 3 要素に何らかの非零を入れればよい。

$$\begin{bmatrix} 37 & 1 & 0 \\ 0 & -109 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}$$

あるいは、問 2 の結果 (対角行列) を B として、 $P^{-1}AP=B$ から $A=PB P^{-1}$ であるから、正則な P であって A を対角行列から外していくようなものを用意してみる。

B				P				P ⁻¹				PBP ⁻¹			
37	0	0		1	0	1		1	0	-1		37	0	19	
0	-109	0		0	1	0		0	1	0		0	-109	0	
0	0	56		0	0	1		0	0	1		0	0	56	

問 4 : 非対角な対称行列の固有値

その固有値が 37, -109, 56 であるような非対角かつ対称な行列を 1 つ例示せよ。

【略解】※授業中の設問にできなかった問題。

対角行列と実対称行列の間は直交行列で相似にできる。

もっとも単純な直交行列は正規直交基底を並べる単位行列であろうが、これでは非対角にならない。そこで、正規直交基底をちょっとだけ並べ替えた対称行列 P を取る。平方根を避けるとすると、 $3^*3+4^*4=5^*5$ 、及び直交に配慮して、例えば次式。

B				P				P ⁻¹				PBP ⁻¹			
37	0	0		1	0	0		1	0	0		37	0	0	
0	-109	0		0	-0.8	0.6		0	-0.8	0.6		0	-49.6	79.2	
0	0	56		0	0.6	0.8		0	0.6	0.8		0	79.2	-3.4	

問5：対角化できない行列への変形

上記問2の結果に対して、できるだけ単純な（手間をかけない）変更で対角化できない行列を1つ例示せよ。

【略解】

Jordan の標準形にすることを考え、例えば2次の Jordan 細胞を1つ用意する。

J(37,2)+J(56,1) ただし「+」は直和演算(P139)を現すものとする。

B'			
	37	1	0
	0	37	0
	0	0	56

※授業時には最初の出題文を間違えていました。

※映像で確認したところ、解答時に Jordan 細胞とは言っているのですが、書き換えを Joran 細胞にしていまませんでした。上記例のように Jordan 細胞内は対角要素をそろえる必要があります。

問6：二次曲面の標準形

指定された図形の標準形と係数行列を示せ。

【略解】

2乗項の正負に特に注意する。

$x_2=0$ の断面で楕円を成している場合、標準形は次式のように表せる。

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{c^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1$$

これは移動や回転を伴わなくとも実二次形式で直接表現できる。

$$\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{bmatrix}$$

以上