# 線形代数 B/III 期末試験問題（2015 年 2 月 10 日・改訂版）　（３枚目中１枚目）

学籍番号　〔　　　　　　　　　　〕　　　　氏名　〔　　　　　　　　　　　　〕

※問題用紙と解答用紙は兼用になっている。問題用紙は３枚ある。３枚とも記名すること。
（※２枚目、３枚目は亀田からの出題ではないので本資料には含まれていない。）

問１

１．次の複素行列（その要素に複素数を許す行列）のうち、固有値が求められるものに○を、そうでないものに×を記せ。

３次正方行列〔○〕　４行３列の行列〔×〕　３行３列の行列であって正則でない行列〔○〕

３行３列の行列であって対称行列〔○〕　３次正方行列 A で A-λE が正則でないことがある場合の A〔○〕

Jordan 細胞〔○〕

【解説】P104 の中ほどにあるように、複素数の範囲まで考えるのであれば、固有方程式はλの n 次方程式になって必ず n 個の根を持つ。固有方程式を立てるための条件は正方であることだけであるので、正方でさえあれば(他になにか修飾語があろうがなかろうが)すべて○。そうでなければ×。

ちなみに、解を有する以上は、その個数は（重根を根の数だけ数えて複素数も含めて）常に n 個。

「異なる」固有値が n 個見つかるかどうかは条件次第、となる。

２．次の n 次実正方行列（その要素に実数を許す正方行列）のうち、線形独立な固有ベクトルが n 本得られることがその性質から確定しているものに○を、そうでないものに×を記せ。

正方行列〔×〕　対角行列〔○〕　対称行列〔○〕　単位行列〔○〕　零行列〔○〕

【解説】p117 の「実対称行列の対角化」の定理から、実対称行列Aに対してなら、適当な直交行列Pとして A の単位固有ベクトル全部を取ることができる（その P を用いて対角化を行う）。つまり、実対称行列なら線形独立な固有ベクトルが n 本必ず得られる（固有値に重根があってもよいことに注意）。対角行列、単位行列、零行列はすべて実対称行列の一種であるから○。

問２

2 次元の実平面 L を考える。この平面上で直交する２軸を取って、それを x 軸と y 軸と呼ぶ。

また２軸の交点を原点とする。このとき、点 S の原点からの距離を $d_S$ と表記する。

ある線形変換 $f$ は、4x+y=0 上の点 P を、<u>その直線上の原点からみて同じ方向の</u>距離 $2d_P$ である点に写す。

同様に、x-y=0 上の点 Q を、<u>その直線上の原点からみて同じ方向の</u>距離 $4d_Q$ である点に写す。

ここで、x 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_1$、y 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_2$ とし、これらは正規直交基底を成すとする。

この基底に関する線形変換 $f$ を表現する行列を A とする。

※上記下線部が出題の補足部分に相当（改訂部）。

１．A の固有値を示せ。

【解説】 固有値の定義(P103,式(1))は $f(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$、ないしそこで基底を用意して表現した $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ である 。上記説明文と照らし合わせると 2,4 （これ以上の説明は不要）。

なお、上記の説明文から

$$\begin{bmatrix}2\\-8\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

やそれをまとめた

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

から A を求め、そこから本問１以降を順次答える答案が少なからずあったが、これらは固有値の趣旨を理解してないために無駄に遠回りしているので反省すること。３次や４次、それ以上の正方行列で出題されたときに対応できないであろう。（今回は採点に際して減点はしていない）

２．上の１．で求めた固有値それぞれについて固有ベクトルを示せ。導出過程も示すこと。固有空間全体を表現できる記法が望ましい。

【解説】 $\lambda_1=2$ については対応する固有空間（ここではただの直線） $4x+y=0$ から x を自由変数にとると ${}^t(x, -4x)$。固有ベクトルは $C_1\,{}^t(1,-4)$。

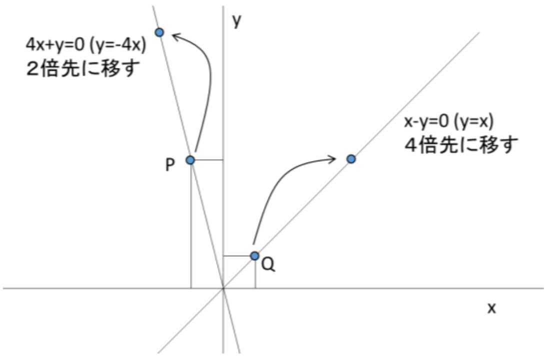
$\lambda_2=4$ については対応する固有空間（ここではただの直線） $x-y=0$ から x を自由変数にとると ${}^t(x, x)$。固有ベクトルは $C_2\,{}^t(1,1)$。

ただし $C_1, C_2$ は非零の実数。（固有値が実数の時点で実数限定）

なお、定数倍して同じになるものであれば固有ベクトル表現はどれも可（たとえば $C_1\,{}^t(-1,4), C_2\,{}^t(-2,-2)$ としてあっても正解）。

３．平面Ｌ上において、$f$によって P と Q がどのように写されるか図形的に示せ。

【解説】 それぞれの直線上で２倍、４倍に写る様子が書いてない場合は減点。図は正確に描くこと。傾きが１や-2 に見えないような作図は正解とは見なしにくい。




４．平面Ｌ上において、$f$によって任意の点 S がどのように写されるか図形的に示せ。このとき、$f$の表現行列である A の固有値と固有ベクトルを用いて説明すること。

【解説】

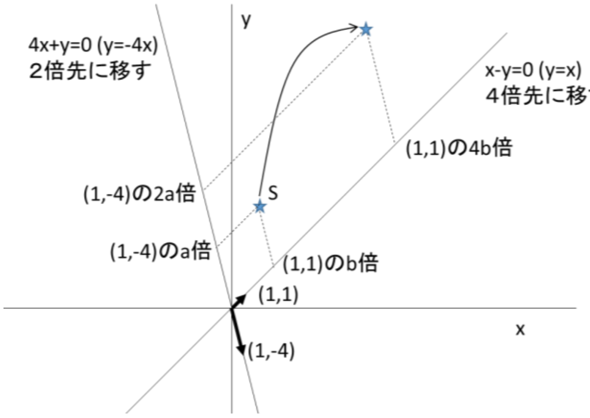
任意の点 S は任意の実数 a,b を用いて、$S= a\,{}^t(1,-4) + b\,{}^t(1,1)$ で表現できる。

$A S = A (a\,{}^t(1,-4) + b\,{}^t(1,1) ) = a A\,{}^t(1,-4) + b A\,{}^t(1,1) = a\, 2\,{}^t(1,-4) + b\, 4\,{}^t(1,1)$

つまり、S は(1,-4)に沿って a の２倍、(1,1)に沿って b の４倍の点に写る。

・写された先を S'とすると、原点 O, S, S' は同一直線上にないことに注意。

・これらの固有ベクトル（図中の補助線）は直交しない。直交するかのように作図していた場合は減点対象。




５．行列 A を対角化して得られた行列を B とする。B を示せ。

【解説】「対角化」可能と問題文が示しているので、そこは議論しなくてよい。対角化できた際に対角要素に並ぶのは固有値(P110 式(1))なので、直接書き下して可。

$$B=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}$$

上式の 2,4 は入れ替えても可。

上記のように直接解答してあるのが望ましいが、すでに既知である線形独立な固有ベクトル２本を使って P（および $P^{-1}$）を用意し、A を得てから B を求めてあってもよい。

６．行列 A を求めよ。導出過程も示すこと。

【解説】対角行列Ｂから逆に A を求めることを考える。

固有ベクトルを並べた正則な表現行列 P を用いて、A と B とは相似な関係にできる（P109)から、

$$B=P^{-1}AP$$

左から P, 右から $P^{-1}$ をそれぞれ両辺に乗ずることで

$$A=PBP^{-1}$$

ここで、P を B の固有値の並びに注意して、上問 2.で答えた固有ベクトルの並びを下記のようにすると、

$$P=\begin{bmatrix}1&1\\-4&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-1\\4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2&-0.2\\0.8&0.2\end{bmatrix},\qquad A=\frac{2}{5}\begin{bmatrix}9&1\\4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.6&0.4\\1.6&2.4\end{bmatrix}$$

もし固有値の並びが上問 5.で逆なら、P と $P^{-1}$ はそれに合わせて変更となるが A は不変。

$$P=\begin{bmatrix}1&1\\1&-4\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.2\\0.2&-0.2\end{bmatrix},\qquad A=\frac{2}{5}\begin{bmatrix}9&1\\4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.6&0.4\\1.6&2.4\end{bmatrix}$$

※ページ番号は教科書「改訂　線形代数要論（青木利夫他）培風館」のもの。

# 線形代数 B/III 期末試験問題（2015 年 2 月 17 日・再）　（３枚目中１枚目）

学籍番号　〔　　　　　　　　　　〕　　　　氏名　〔　　　　　　　　　　　　　　〕

※問題用紙と解答用紙は兼用になっている。問題用紙は３枚ある。３枚とも記名すること。

※本問は正当な理由によって本試験を受けられなかった受講生に対する再試験である。追試ではない。

問 1

１．n 次元複素線形空間の線形変換 $f$ に対して、ある基底を用意し $f$ の表現行列を A とする。今、その空間中のベクトルを $\mathbf{x}$ と表記する。

(1) $f$ の固有値の一つが $\lambda_k$ であったとし、それに対応する固有ベクトルが $\mathrm{x}_k$ であったとする。$f$, $\lambda_k$, $\mathbf{x}_k$ の間に成立する式を示せ。

(2) 上記(1)と同様に、A, $\lambda_k$, $\mathbf{x}_k$ の間に成立する式を示せ。

(3) A の固有多項式を示せ。

(4) 固有方程式を示せ。

(5) 重複も許して数えるとすると、固有値は幾つ存在するか。

(6) A の全ての要素が実数であっても、固有値は全て実数になる保証はない。そのような例を１つ挙げよ。

【解説】(1) $f(\mathrm{x}_k)=\lambda_k \mathrm{x}_k$　(2) $A\mathrm{x}_k=\lambda \mathrm{x}_k$ (3) $|A-\lambda_k E|$ (4) $|A-\lambda_k E|=0$ (5) n 個（教科書 P104 中ほどの説明参照) (6) 単純な例としては 2 次元正方行列であって固有方程式の解の判別式が負になるものを選ぶ。

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \ |A-\lambda E|=\lambda^2+1=0$$

２．ある n 次複素行列 A（その要素に複素数を許す行列）が対角化可能で、対角化して得られた対角行列を B とする。次の説明について、正しいなら○を、間違いなら×をつけよ。

(1) 対角行列はただ一通り求まる〔　〕

(2) A と B の固有値は全て一致する〔　〕

(3) A と B の同じ固有値に対する固有ベクトル表現は一致する〔　〕

(4) A と B の固有多項式が一致する〔　〕

(5) A と B の行列式は一致する〔　〕

【解説】○、○、×、○、○。対角化行列は、相似な行列を得る操作の結果として得られる(P109「相似な行列」)。得られた対角化行列は元の行列に対して相似なので、相似の性質に従って解答すればよい。(3)は P109 註および P114 問題 5-2, 11 でも言及されている。

問 2

2 次元の実平面 L を考える。この平面上で直交する 2 軸を取って、それを x 軸と y 軸と呼ぶ。

また 2 軸の交点を原点とする。このとき、点 S の原点からの距離を $d_S$ と表記する。

ある線形変換 $f$ は、x+3y=0 上の点 P を、その直線上の原点からみて同じ方向の距離 $3d_P$ である点に写す。

一方で、この線形変換 $f$ を、2x-y=0 上の点 Q に適用しても、点の位置は変わらなかった。

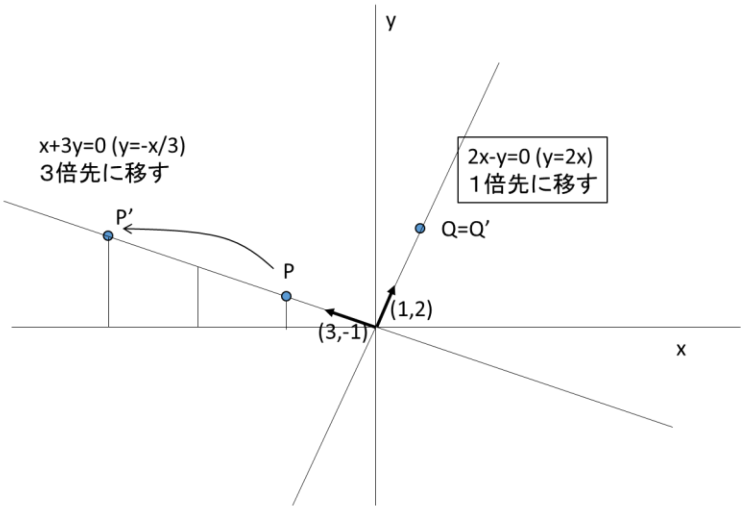
ここで、x 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_1$、y 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_2$ とし、これらは正規直交基底を成すとする。

この基底に関する線形変換 $f$ を表現する行列を A とする。

１．平面 L 上において、$f$ によって P と Q がどのように写されるか図形的に示せ。できるだけ正確さに気を付け

て作図すること。

【解説】Q については動かないことを示してあること。




２．線形変換 $f$ の固有値を示せ。理由も記述すること。A を求めずに示すことが望ましい。

【解説】 固有値の定義(P103,式(1))は $f(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$。そこで基底を用意して線形変換 $f$ を行列 A で表現し直した場合は $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ である 。上記説明文と照らし合わせると 3,1 （これ以上の説明は不要)。

３．上の１．で求めた固有値それぞれについて固有ベクトルを示せ。導出過程も示すこと。固有空間全体を表現できる記法が望ましい。

【解説】 $\lambda_1=3$ については対応する固有空間（ここではただの直線） $x+3y=0$ から y を自由変数にとると ${}^t(-3y, y)$。固有ベクトルは $C_1\,{}^t(3,-1)$。

$\lambda_2=1$ については対応する固有空間（ここではただの直線） $2x-y=0$ から x を自由変数にとると ${}^t(x, 2x)$。固有ベクトルは $C_2\,{}^t(1,2)$。

ただし $C_1, C_2$ は非零の実数。(固有値が実数の時点で実数限定)

なお、定数倍して同じになるものであれば固有ベクトル表現はどれも可（たとえば $C_1\,{}^t(1,-3)$, $C_2\,{}^t(3,6)$ としてあっても正解)。

４．A は対角化可能である。その根拠を説明せよ。

【解説】A は二次元正方行列であるし、２つの異なる固有値を持つから。(これにより、あとは教科書 P107 の「固有ベクトルの線形独立性」定理および P110「対角化の条件」定理から言える。つまり、異なる固有値を持つことから線形独立な固有ベクトルを２本用意することができ、それはそのまま対角化の条件に合致するから。)

５．A を対角化せよ。導出過程ないし根拠も示せ。

【解説】上記１． ４．から対角化可能と言える。その際に対角要素に並ぶのは固有値(P110 式(1))である。

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式の 3,1 は入れ替えても可。

定理から簡単に上記のように示せない場合は計算に頼っても可だが、数学的センスがあるとは言い難い。

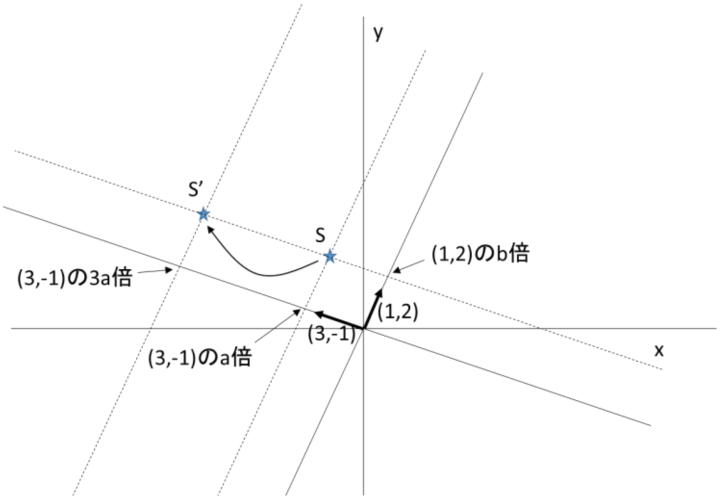
６．平面 L 上において、$f$ によって任意の点 S がどのように写されるか図形的に示せ。このとき、$f$ の表現行列である A の固有値と固有ベクトルを用いて説明すること。

【解説】

s は、(1,2)の b 倍のベクトルと(3,-1)の a 倍のベクトルの和で表すことができる。

A により s を s'に写すと、s'は(1,2)の b×1 倍のベクトルと(3,-1)の a×3 倍のベクトルの和で表せることになる。

本試験の問２の４．も参照。




以上