線形代数 B/III 期末試験問題（2015 年 2 月 10 日・改訂版）　（３枚目中１枚目）

学籍番号　〔　　　　　　　　　〕　　　氏名　〔　　　　　　　　　　　　　〕

※問題用紙と解答用紙は兼用になっている。問題用紙は３枚ある。３枚とも記名すること。

（※２枚目、３枚目は亀田からの出題ではないので本資料には含まれていない。）

問１

１．次の複素行列（その要素に複素数を許す行列）のうち、固有値が求められるものに〇を、そうでないものに×を記せ。

３次正方行列〔　〕　４行３列の行列〔　〕　３行３列の行列であって正則でない行列〔　〕

３行３列の行列であって対称行列〔　〕　３次正方行列 A で A-λE が正則でないことがある場合の A〔　〕

Jordan 細胞〔　〕

２．次の n 次実正方行列（その要素に実数を許す正方行列）のうち、線形独立な固有ベクトルが n 本得られることがその性質から確定しているものに〇を、そうでないものに×を記せ。

正方行列〔　〕　対角行列〔　〕　対称行列〔　〕　単位行列〔　〕　零行列〔　〕

問２

2 次元の実平面 L を考える。この平面上で直交する２軸を取って、それを x 軸と y 軸と呼ぶ。

また２軸の交点を原点とする。このとき、点 S の原点からの距離を d_S と表記する。

ある線形変換 f は、4x+y=0 上の点 P を、<u>その直線上の原点からみて同じ方向の</u>距離 $2d_P$ である点に写す。

同様に、x-y=0 上の点 Q を、<u>その直線上の原点からみて同じ方向の</u>距離 $4d_Q$ である点に写す。

ここで、x 軸に対応する基底を e_1、y 軸に対応する基底を e_2 とし、これらは正規直交基底を成すとする。

この基底に関する線形変換 f を表現する行列を A とする。

※上記下線部が出題の補足部分に相当（改訂部）。

１．A の固有値を示せ。

２．上の１．で求めた固有値それぞれについて固有ベクトルを示せ。導出過程も示すこと。固有空間全体を表現できる記法が望ましい。

３．平面 L 上において、f によって P と Q がどのように写されるか図形的に示せ。

４．平面 L 上において、f によって任意の点 S がどのように写されるか図形的に示せ。このとき、f の表現行列である A の固有値と固有ベクトルを用いて説明すること。

５．行列 A を対角化して得られた行列を B とする。B を示せ。

６．行列 A を求めよ。導出過程も示すこと。

線形代数 B/III 期末試験問題（2015 年 2 月 17 日・再）　（３枚目中１枚目）

学籍番号　〔　　　　　　　　　　　〕　　　　氏名　〔　　　　　　　　　　　　　　〕

※問題用紙と解答用紙は兼用になっている。問題用紙は３枚ある。３枚とも記名すること。

問１

１．ｎ次元複素線形空間の線形変換 f に対して、ある基底を用意し f の表現行列を A とする。今、その空間中のベクトルを $\mathbf{x}$ と表記する。

(1) f の固有値の一つが λ_k であったとし、それに対応する固有ベクトルが x_k であったとする。f, λ_k, $\mathbf{x}_k$ の間に成立する式を示せ。

(2) 上記(1)と同様に、A, λ_k, $\mathbf{x}_k$ の間に成立する式を示せ。

(3) A の固有多項式を示せ。

(4) 固有方程式を示せ。

(5) 重複も許して数えるとすると、固有値は幾つ存在するか。

(6) A の全ての要素が実数であっても、固有値は全て実数になる保証はない。そのような例を１つ挙げよ。

２．あるｎ次複素行列 A（その要素に複素数を許す行列）が対角化可能で、対角化して得られた対角行列を B とする。次の説明について、正しいなら○を、間違いなら×をつけよ。

(1) 対角行列はただ一通り求まる〔　〕

(2) A と B の固有値は全て一致する〔　〕

(3) A と B の同じ固有値に対する固有ベクトル表現は一致する〔　〕

(4) A と B の固有多項式が一致する〔　〕

(5) A と B の行列式は一致する〔　〕

問２

2 次元の実平面Ｌを考える。この平面上で直交する２軸を取って、それを x 軸と y 軸と呼ぶ。

また２軸の交点を原点とする。このとき、点 S の原点からの距離を d_S と表記する。

ある線形変換 f は、x+３y=0 上の点 P を、その直線上の原点からみて同じ方向の距離 $3d_P$ である点に写す。

一方で、この線形変換 f を、2x-y=0 上の点 Q に適用しても、点の位置は変わらなかった。

ここで、x 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_1$、y 軸に対応する基底を $\mathbf{e}_2$ とし、これらは正規直交基底を成すとする。

この基底に関する線形変換 f を表現する行列を A とする。

１．平面Ｌ上において、f によって P と Q がどのように写されるか図形的に示せ。できるだけ正確さに気を付けて作図すること。

２．線形変換 f の固有値を示せ。理由も記述すること。A を求めずに示すことが望ましい。

３．上の１．で求めた固有値それぞれについて固有ベクトルを示せ。導出過程も示すこと。固有空間全体を表現できる記法が望ましい。

４．A は対角化可能である。その根拠を説明せよ。

５．A を対角化せよ。導出過程ないし根拠も示せ。

６．平面 L 上において、f によって任意の点 S がどのように写されるか図形的に示せ。このとき、f の表現行列である A の固有値と固有ベクトルを用いて説明すること。